p étant un entier relatif quelconque, on appelle E_p l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle x, notées f_p, définies et continues sur $[0, +\infty[$, satisfaisant en outre aux deux conditions :

(1) $$f_p(0) = 0,$$

(2) $$\forall x,\ x \geqslant 1 : f(x) = f(x-1) + x^p$$

Chaque fois que p aura été fixé, il sera inutile de répéter l'indice p attaché à f.

I 1° Supposons p fixé et E_p *non vide* :

a. f étant un élément de E_p, n un entier naturel, calculer $f(x) - f(x-n)$ et montrer que le résultat est indépendant du choix de f.

b. Calculer $f(n)$ et vérifier que si x est entier $f(x)$ ne dépend pas de f.

c. i et k étant deux entiers naturels différents, établir une formule permettant de calculer les valeurs de f sur $[k, k+1]$ lorsqu'on connaît ses valeurs sur $[i, i+1]$. Distinguer deux cas suivant le signe de $k - i$.

2° Réciproquement, p étant toujours fixé, on veut prouver qu'il *existe* des fonctions f. Montrer que pour en obtenir une il suffit de choisir sa restriction φ à un intervalle quelconque $[i, i+1]$, $(i \in \mathbb{N})$, pourvu, toutefois, que φ satisfasse à certaines conditions qu'on demande d'énoncer.

Exemple : Soit $p = +1$. Montrer qu'on peut choisir comme restriction à l'intervalle $[1, 2]$ le trinôme $\varphi(x) = -2x^2 + ax + b$. Quelles valeurs doit-on alors donner aux réels a et b?

Représenter graphiquement sur l'intervalle $[0, 4]$ la fonction f ainsi définie.

3° Démontrer que si $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ sont deux éléments quelconques de E_p la différence $f^{(1)} - f^{(2)}$ est une fonction périodique. Peut-on énoncer une réciproque?

II On suppose p positif ou nul et on cherche si, parmi les éléments de E_p, il y a des polynômes.

1° Démontrer que :

a. S'il en existe un, il est unique.

b. Si on connaît un polynôme Q_p satisfaisant à la condition (2) on en déduit un polynôme P_p élément de E_p par addition d'une constante convenable.

2° En admettant l'existence de P_p montrer que $\frac{1}{p} P'_p$ satisfait à la condition (2) relative à E_{p-1} (P'_p désignant la dérivée de P_p).

Vérifier que $P_0 = x$ est un élément de E_0. En déduire un polynôme P_1 élément de E_1. De P_1 déduire P_2 élément de E_2 puis enfin P_3 élément de E_3.

Écrire les formules donnant les sommes de n premiers nombres entiers, de leurs carrés et de leurs cubes.

III Dans cette question, $p = -2$, n désigne un entier quelconque supérieur à 4. On définit un élément f de E_{-2} par la condition « la restriction de f à l'intervalle $[3, 4]$ est un binôme du premier degré ».

1° Écrire l'expression de f sur $[3, 4]$ puis sur $[n-1, n]$. Montrer que sur $]n-1, n[$ la dérivée seconde est positive.

2° Calculer en fonction de n l'intégrale définie :

$$I_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx.$$

3° Le repère (Ox, Oy) étant orthonormé, on considère le trapèze de sommets

$$M[x = n, y = f(n)],\quad N[x = n-1, y = f(n-1)],$$
$$P(x = n-1, y = 0),\quad Q(x = n, y = 0).$$

Calculer son aire en fonction de n et $f(n)$. Comparer I_n à cette aire et montrer que la limite l de

$$f(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

lorsque $n \to +\infty$ ne peut être inférieure au réel

$$a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \times 4^2} + f(3).$$

4° Sachant que a est strictement compris entre $f(388)$ et $f(389)$ justifier le classement :

$$a + \int_{390}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < l < a + \int_{388}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculer puis écrire sous forme décimale approchée la largeur et les valeurs extrêmes de cet encadrement. Le réel $\frac{\pi^2}{6}$ y est-il inclus?

FIN

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX 1977
ET DES TECHNIQUES SANITAIRES Option PHYS-MATH
PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES
×I75×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail